Ample divisorとしてのGrassmann多様体

藤田, 隆夫

代数幾何学シンポジウム記録
1978年度　pp.161-176

Ample divisor としての Grassmann 多様体

東大教養　藤田隆夫

まず記号を定めておく。体 k 上の n 次元ベクトル空間 V の余次元 r の部分空間達のなす Grassmann 多様体を $G_{n,r}(V)$ あるいは単に $G_{n,r}$ で表わす。$G_{n,r}$ 上には rank n の trivial vector 束の subbundle として自然に rank $(n-r)$ の vector 束 E^*_{n-r} が定まる。対応する商バンドル $E^*_{n-r}\backslash I^n$ を E_r で表わす。即ち次は完全となる： $0 \longrightarrow E^*_{n-r} \longrightarrow I^n \longrightarrow E_r \longrightarrow 0$.
さて $\det E_r = H_r$ とおく。次の諸事実はよく知られている。

(0-1) H_r は very ample で，対応する embedding は Plücker 座標によるものに他ならない。

(0-2) $(n,r)=(n,1)$ 又は $(n,n-1)$ のとき，$G_{n,r}$ は $\mathbb{P}^{n-1}$ と同型で H_r は超平面切断に対応する。また $G_{4,2}$ は $\mathbb{P}^5$ 内の2次超曲面として $|H_r|$ により埋めこまれている。

この ~~ように~~ 際には $G_{n,r}$ は次元が1つ大きな多様体

の中の ample divisor となっているわけだが，実はこのようなことは上述の古典的な場合にしか起こらないのである。即ち

定理．A を manifold M 上の ample divisor とし，$A \cong G_{n,r}$ と仮定する。このとき $(n,r)=(n,1)$ or $(n,n-1)$ or $(4,2)$ である。

講演の際には k の標数を 0 と仮定したが，Kempf [3] の結果を小平の消滅定理の代わりに用いてこの仮定はのぞけるようである。この結果を教えていただいた丸山先生はじめ諸先生方に感謝したい。さて以下証明の大要を記すことにする。

§1．一般論からの準備．

補題(1-1)．A は M 上の ample divisor，E は M 上のベクトル束とし，$L=[A]\in \mathrm{Pic}(M)$ とおく。ある $p<\dim M$ に対し，$H^p(A, E[tL])=0$ が任意の $t\leq 0$ に対し成立つならば，$H^p(M,E)=0$ となる。

証明は [4] Lemma I-B にある。

系(1-2)．A，M は上同様とし，さらに

$H^1(A, -tL) = 0$ が任意の $t \geqq 1$ に対し成立つとする。このとき $\mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Pic}(A)$ は単射。

証明は容易。[2] (2.5) にもある。

命題(1-3). A, M は (1-1) 同様で, $\mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Pic}(A)$ は単射と仮定する。このとき morphism $\pi: M \to A$ で $A \subset M$ への制限が A の identity となるものは存在しない。

∵ 単射性より $L = \pi^* L_A$ が出るが, これは L が ample なことに反する。

命題(1-4). A, M, L は (1-1) 同様とする。E が A 上のベクトル束で $H^2(A, \mathrm{End}(E)[-tL]) = 0$ が任意の $t \geqq 1$ に対し成立つなら, A に沿っての M の formal completion $\hat{M}$ 上のベクトル束 $\hat{E}$ で $\hat{E}_A = E$ となるものが存在する。

証明は容易。SGA 1 にもある。

命題(1-5). $A, M, \hat{M}, L$ は (1-4) 同様とし, $\hat{E}$ を $\hat{M}$ 上のベクトル束, $\hat{E}_A = E$ とする。$\dim A \geqq 2$ でさらに $H^p(A, E[tL]) = 0$ が任意の $0 < p < \dim A$, $t \in \mathbb{Z}$ に対し成立てば, M 上のベクトル束 $\tilde{E}$ で $\tilde{E}_{\hat{M}} = \hat{E}$ となるものが存

在する。

証明は[5] Chap. IV をまねて次のようにやる。

補題(1-6). $\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ は $\bigoplus_{t\geq 0} H^0(\hat{M}, tL) \cong \bigoplus_{t\geq 0} H^0(M, tL)$ module として有限生成.

補題(1-7). $t \gg 0$ なら $\mathcal{O}_{\hat{M}}(\hat{E}[tL])$ は global sections で生成される。

上の二補題の証明には[5]を見よ。

さて(1-6)より $F \cong [a_1 L] \oplus \cdots \oplus [a_r L]$ なる型の $\hat{M}$ 上のベクトル束と $\hat{M}$ 上の Hom $\Phi: F \longrightarrow \hat{E}$ で $H^0(\Phi[tL]): H^0(\hat{M}, F[tL]) \longrightarrow H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ が任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し全射となるものがとれる。(1-7)より Φ は自動的に全射となる。そこで $\mathrm{Ker}(\Phi)$ は $\hat{M}$ 上局所自由。これに対し上同様の操作をほどこし全射 $\Psi: F_2 \cong [b_1 L] \oplus \cdots \oplus [b_q L] \longrightarrow \mathrm{Ker}(\Phi)$ を得る。記号の混用により $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\hat{M}}(F_2, F)$ とみなそう。すると明らかに $\hat{E} \cong \mathrm{Coker}(\Psi)$ となっている。

さて F, F_2 はその形より明らかに M 上のベクトル束 $\tilde{F}, \tilde{F}_2$ に拡張できる(実は一意)。

$\mathrm{Hom}_M(\widetilde{F}_2, \widetilde{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\hat{M}}(F_2, F)$ だから (cf. [5])
Φ も $\widetilde{\Phi}: \widetilde{F}_2 \longrightarrow \widetilde{F}$ に拡張できる。$E' = \mathrm{Coker}\,\widetilde{\Phi}$ と
おく。ただしここでは M 上の sheaf の category
で考えている。ともあれ $E'_{\hat{M}} = \hat{E}$ であるから
E' は M 上有限個の点を除けば局所自由である。
E' の torsion part を除去して，得られる商 sheaf
$\widetilde{E}$ が $H^0(M, \widetilde{E}[-tL]) = 0$ for $t \gg 0$ をみたす
ようにできる。$\widetilde{E}$ も $\widetilde{E}_{\hat{M}} = \hat{E}$ をみたす。こ
こ与えられた条件より $H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL]) \longrightarrow H^0(A, E[tL])$
が全射であることがわかる。一方 $H^0(M, \widetilde{F}[tL])$
$\cong H^0(\hat{M}, F[tL])$ と Φ の定義とによって
$H^0(M, \widetilde{F}[tL]) \longrightarrow H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ は全射，従
って $H^0(M, E'[tL]) \longrightarrow H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ も全射，
$H^0(M, \widetilde{E}[tL]) \longrightarrow H^0(A, E[tL])$ も全射。こ
れより $h^1(M, \widetilde{E}[(t-1)L]) \leq h^1(M, \widetilde{E}[tL])$ が任
意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し成立ち，$t \to \infty$ での Serre
の消滅定理より $h^1(M, \widetilde{E}[tL]) = 0$ が出る。同
様に（実際はさらに容易に）$H^p(M, \widetilde{E}[tL]) =$
0 が任意の $0 < p < \dim M$, $t \in \mathbb{Z}$ に対して言
える（くわしくは [2] (2.1) 参照）。そこで双

対性理論より $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_M}(\hat{E}, \Omega_M[tL]) = 0$ for $p>0$, $t \gg 0$。よって，L は ample なのだから，$\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_M}(\hat{E}, \omega_M) = 0$ for $p>0$。ところが，M は non-singular で，ω_M は invertible だから，これは $\hat{E}$ が locally free であることを imply する。かくて (1-5) は示された。

系 (1-8)．A, M, L は (1-1) 同様，E は ~~M~~ A 上のベクトル束で次の二条件をみたすとする：

$H^2(A, \mathrm{End}(E)[-tL]) = 0$ for any $t \geqq 1$,

$H^p(A, E[tL]) = 0$ for any $0 < p < \dim A$, $t \in \mathbb{Z}$.

するとEはM上のベクトル束に拡張できる。

命題 (1-9). A, M, L は (1-1) 同様，E は M 上のベクトル束とする。$H^0(M, tL) \longrightarrow H^0(A, tL)$ は任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し全射，また自然な写像 $H^0(A, E[tL]) \otimes H^0(A, L) \longrightarrow H^0(A, E[(t+1)L])$ が任意の $t \geqq 0$ に対し全射，さらに $H^0(M, E) \longrightarrow H^0(A, E)$ も全射と仮定する。このとき，$H^0(M, E[tL]) \longrightarrow H^0(A, E[tL])$ および $H^0(M, E[tL]) \otimes H^0(M, L) \longrightarrow H^0(M, E[(t+1)L])$ は任意の $t \geqq 0$ に対して全射である。

証明には下の可換図式を用いて t に関する帰納法によればよい。詳細は略す。

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(M,E[tL])\otimes H^0(M,L) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(A,E[tL])\otimes H^0(A,L) \arrow[d] \\
H^0(M,E[tL]) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "x \mapsto x\otimes a"] & H^0(M,E[(t+1)L]) \arrow[r] & H^0(A,E[(t+1)L])
\end{tikzcd}$$

ただし $a\in H^0(M,L)$ は A の定義 section。

系(1-10). A, M, L, E を(1-9)同様とする。このとき E は global sections で生成される。

∵ L は ample だから $t\gg 0$ なら $E[tL]$ は global sections で生成される。一方,(1-9)の第二の積写像が全射なことから, $E[(t+1)L]$ が global sections で生成されるなら $E[tL]$ もそうなる。よって上からの induction により E が global sections で生成されることがわかる。

§2. Grassmann 多様体の Geometry

先に定めた記号 $G_{n,r}(V)$, $G_{n,r}$, E^*_{n-r}, E_r, H_r 等は以下でも同様に用いる。さらに $F_{n,r_1,r_2,\dots,r_k}(V)$ で corank $V_j = r_j$ なる V の filtration $0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_k\subset V$ 達のな

す flag 多様体を表わす。$F_{n,r_1,\cdots,r_k}$は明かに $G_{n,r_1}\times G_{n,r_2}\times\cdots\times G_{n,r_k}$ の部分多様体であり，E^*_{n-r}, E_r, H_r 等の $F_{n,\cdots}$ への引きもどしが自然に定まるが，これらも記号の混用により同じ E^*_{n-r}, E_r, H_r などであらわす。$F_{n,\cdots}$ にはベクトル束達の自然な filtration

$$0\subset E^*_{n-r_1}\subset E^*_{n-r_2}\subset\cdots\subset E^*_{n-r_k}\subset I^n$$

が定まる。$F_{n,n-1,n-2,n-3,\cdots,2,1}$ を特に F_n と記す。F_n 上の line bundle H_i-H_j を H_i^j で表わす。

命題(2-1). $T^{G_{n,r}}\cong \mathrm{Hom}(E^*_{n-r},E_r)$。よって $K^{G_{n,r}}\cong -nH_r$。ただし，T^X は一般に多様体 X の tangent bundle, K^X は canonical bundle を表わすとする。

∵ 明らか。

系(2-2). $K^{F_{n,r_1,\cdots,r_k}}=-\sum_{j=1}^{k}(r_{j-1}-r_{j+1})H_{r_j}$。

ただしここで $r_0=n$, $r_{k+1}=0$ とおく。

∵ 容易。

命題(2-3). $L=\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j H_j\in \mathrm{Pic}(F_n)$ とすると，$\Gamma(F_n,L)\neq 0$ となる~~ための~~必要十分条件は各 μ_j がすべて負でないことである。

∵ H_j は $G_{n,j}$ 上 very ample だから十分性は明らか。必要性を示す。そのため自然な写像 $F_n \longrightarrow F_{n,n-1,\cdots,j+1,j-1,\cdots,1}$ を考える。これの各 fiber は $\mathbb{P}^1$ と同型であり，L との交点数は μ_j となる。よって $\mu_j \geqq 0$ 。

系 (2-4). $H_1, \cdots, H_{n-1}$ は F_n 上の effective divisor の linear eq. class のなす semi-group の基底を与える.

∵ 明らか。

命題 (2-5). $L = \sum_{j=1}^{k} \mu_{r_j} H_{r_j} \in \mathrm{Pic}(F_{n,r_1,\cdots,r_k})$ とし，各係数 μ_{r_j} がすべて正とする。このとき L は $F_{n,r_1,\cdots,r_k}$ 上 very ample 。

∵ $F_{n,r_1,\cdots,r_k} \subset G_{n,r_1} \times \cdots \times G_{n,r_k}$ より明らか。

系 (2-6). 上と同じ L を F_n 上で引きもどして考えると，$Bs|L| = \phi$ かつ $\kappa(L) = \dim F_{n,r_1,\cdots,r_k}$.

∵ 明らか.

定理 (2-7). $L \in \mathrm{Pic}(F_n)$, $Bs|L| = \phi$ とする。このとき $H^p(F_n, -L) = 0$ unless $p = \kappa(L)$.

証明は Kempf [3], p. 328, Th. 2 による。な

お，標数0の体上である，これは小平・Ramanujan型消滅定理の一例に過ぎない。

系 (2-8). $H^p(G_{n,r}, tH_r) = 0$ for $0 < p < \dim G_{n,r}$ and $t \in \mathbb{Z}$.

∵ $t < 0$ に対しては定理(2-7)が適用できる。$t \geqq 0$ のときは $h^p(G_{n,r}, tH_r) = h^{(n-r)r-p}(G_{n,r}, K^{G_{n,r}} - tH_r)$ 及び $H^q(G_{n,r}, sH_r) \cong H^q(F_n, sH_r)$ を用いればよい。

補題(2-9). $H^p(G_{n,r}, E^*_{n-r}[tH_r]) = 0$ for $0 < p < \cancel{r(n-r) = \dim G_{n,r}}$, $t \geqq 0$.

∵ 自然な写像 $F_{n,r+1,r} \to G_{n,r}$ に関する Leray の Spectral Sequence をみて，$H^p(G_{n,r}, E^*_{n-r}[tH_r]) \cong H^p(X, E^*_{n-r}[tH_r])$ を得る。ただし簡単のため $X = F_{n,r+1,r}$ とおいた。さらに $H^r_{r+1} = E^*_{n-r} / E^*_{n-r-1}$ となっており，$X \to G_{n,r}$ の様子をよく見れば $H^p(G_{n,r}, E^*_{n-r}[tH_r]) \cong H^p(X, H^r_{r+1} + tH_r) = H^p(X, H_{r+1} + (t-1)H_r)$ を得る。さて (2-2) より $K^X = -(n-r)H_{r+1} - (r+1)H_r$。そこで $h^p(X, H_{r+1} + (t-1)H_r) = h^{\dim X - p}(X, -(n-r+1)H_{r+1} - (r+t)H_r)$。よって F_n に持ち上げてやれば

定理 (2-7) が適用できる。

命題 (2-10). $r \geqq 2,\ n-r \geqq 2$ ならば,

$H^p(G_{n,r}\ ,\ E_r[tH_r]) = 0$ for $0 < p < \dim G_{n,r}$, for any $t \in \mathbb{Z}$.

(:) t により場合をわけて考える。$t > 1-n$ のときは $H^p(G_{n,r}\ ,\ E_r[tH_r]) \cong H^p(F_{n,r,1}\ ,\ H_1 + tH_r)$ 及び $K^{F_{n,r,1}} = -(n-1)H_r - rH_1$ とによって (2-7) を $F_{n,r,1}$ に落として双対化した形の消滅定理が適用できる。$t = 1-n$ のときは $h^p(F_{n,r,1}\ ,\ H_1 + tH_r) = h^{\dim F_{n,r,1} - p}(F_{n,r,1}\ ,\ -(r+1)H_1)$ $= h^{\bullet}(F_{n,1}\ ,\ -(r+1)H_1) = h^{\bullet}(\mathbb{P}^{n-1}, -(r+1)H)$ を得るが, $r \leqq n-2$ よりこれは 0 となる。最後に $t < 1-n$ のときは Serre duality より $h^p(G_{n,r}\ ,\ E_r[tH_r]) = h^{\dim G - p}(G\ ,\ E_r^{\vee}[-(n+t)H_r])$ を得る。ところが, $G_{n,r}(V)$ と $G_{n,n-r}(V^{\vee})$ が canonical に同型であることを用いて $G_{n,n-r}$ に移って考えると, $E_r^{\vee}$ は E_r^{*} に, H_r は H_{n-r} にうつる。そこで (2-9) が適用できる。

系 (2-11). 上と同じ r, n, p, t に対して

$H^p(G_{n,r}\ ,\ E_{n-r}^{*}[tH_r]) = 0$ 。

∵ 同型 $G_{n,r}(V) \cong G_{n,n-r}(V^\vee)$ によって E^*_{n-r}, H_r がそれぞれ $E^\vee_{n-r}$, H_{n-r} にうつること, 及び Serre duality とによって $G_{n,n-r}$ 上での (2-10) に対応する結果にもちこむ。

注意 (2-12). (2-10) の主張は $r=1$ でも成立つ。しかし $r=n-1$ ではダメ。(2-11) の方は故に $r=n-1$ で成立つが $r=1$ ではダメ。

命題 (2-13). $n-r \geqq 3$ のとき, 任意の $t>0$ に対して $H^2(G_{n,r}, \mathrm{End}(E_r) \otimes [-tH_r]) = 0$.

∵ $H^2(F_n, \mathrm{End}(E_r)[-tH_r]) = 0$ を示せばよい。F_n 上では E_r は $E_r \twoheadrightarrow E_{r-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_1$ なるベクトル束による co-filtration を持つ。そして $\mathrm{Ker}(E_j \to E_{j-1}) = H_j^{j-1}$。これを双対化し $E_1^\vee \subset E_2^\vee \subset \cdots \subset E_r^\vee$ なる $E_r^\vee$ の filtration を得, また $\mathrm{CoKer}(E_j^\vee \hookrightarrow E_{j+1}^\vee) = H_j^{j+1} = -H_{j+1}^j$ がわかる。これらより $\mathrm{End}(E_r) \cong E_r \otimes E_r^\vee$ には double filtration が入る。そこで問題は次の補題に帰着する。

補題 (2-14). $H^2(F_n, H_j^{j-1} - H_i^{i-1} - tH_r) = 0$ for any $t \geqq 1$, $1 \leqq i, j \leqq r$.

∵ F_n でなく $F_{n,r,r-1,\cdots,1}$ に落として考えてよい。さて自然な写像 $\pi: F_{n,r,r-1,\cdots,1} \longrightarrow F_{n,r-1,r-2,\cdots,1}$ を観察する。このfiberは $\mathbb{P}^{n-r}$ と同型である。また $L = H_j^{j-1} - H_i^{i-1} - tH_r$ とおけば，L のこのfiber $\cong \mathbb{P}^{n-r}$ への制限は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-t+\delta_{j,r}-\delta_{i,r})$ となる。よって，$t=1$，$j=r$，$i<r$ の場合を除き $R^p\pi_*\mathcal{O}[L] = 0$ for $p \leqq 2$。これより $H^2(F_n, L) = 0$.
他方 $t=1$，$j=r$，$i<r$ の場合 $L = -H_i^{i-1} - H_{r-1}$。
$\therefore H^2(F, L) \cong H^2(F_{n,r-1,i,i-1}, -H_{r-1}-H_i+H_{i-1})$.
ここで写像 $F_{n,r-1,r-2,\cdots,1} \longrightarrow F_{n,r-2,\cdots,1}$ を観察すれば上と同様にして $H^2(F, L) = 0$ が示せる。 q.e.d.

命題(2-14). 積により定まる自然な写像
$H^0(G_{n,r}; E_r[tH_r]) \otimes H^0(G_{n,r}, H_r) \longrightarrow H^0(G_{n,r}, E_r[(t+1)H_r])$ は全射である。$t \geqq 0$ で

∵ $H^0(G_{n,r}, E_r[tH_r]) \cong H^0(F_n, H_1 + tH_r)$ 及び $H^0(G_{n,r}, H_r) \cong H^0(F_n, H_r)$ に注意すれば，これは Kempf [3], p.327, Th.1, (3) の特別な場合に他ならない。

§3. 主定理の証明.

A を manifold M 上の ample divisor とし, $A \cong G_{n,r}$ で $(n,r) \neq (n,1), (n,n-1), (4,2)$ と仮定して矛盾を導く。

$n-r \geqq 3$, $r \geqq 2$ と仮定してよい。

$[A] \in \mathrm{Pic}(M)$ を L とおく。L は ample で, $\mathrm{Pic}(A)$ は H_r で生成されるから, $L_A = aH_r$ for some $a>0$ とおける。

(2-13), (2-10) によって系 (1-8) が適用できることがわかる。よって E_r は M 上のベクトル束 E に拡張できる。

(2-8) と (1-1) をあわせ $H^1(M, \cancel{t}L) = 0$ が任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して示せる。これより $H^0(M, tL) \longrightarrow H^0(A, tL)$ は全射となる。

(2-10) と (1-1) より $H^1(M, E[-L]) = 0$ が出る。よって $H^0(M, E) \longrightarrow H^0(A, E)$ は全射。

(2-14) より $H^0(A, E[tL]) \otimes H^0(A, L) \longrightarrow H^0(A, E[(t+1)L])$ は全射である。

上記三事実より (1-9) が適用できる。よって (1-10) より E は global sections で生成され

ることがわかる。

さて $H^0(A, E[-tL]) \cong H^0(G_{n,r}, E_r[-atH_r]) \cong H^0(F_{n,r,1}, H_1 - atH_r) = 0$ for $t > 0$ が (2-3) から得られる。そこで (1-1) を適用すると $H^0(M, E[-L]) = 0$ を得る。先の $H^1(M, E[-L]) = 0$ とあわせ $H^0(M, E) \cong H^0(A, E)$ となる。よって $h^0(M, E) = h^0(G_{n,r}, E_r) = n$。

さて E は global sections で生成されるのだから holomorphic map $f: M \longrightarrow G_{n,r}$ で $f^*E_r = E$ となるものがある。さらに $f^*: H^0(G_{n,r}, E_r) \longrightarrow H^0(M, E)$ は同型。そこで，f を $A \subset M$ に制限すれば同型写像を得る。

一方 (2-8) と (1-2) より $Pic(M) \to Pic(A)$ は単射となる。

上記二つの主張は (1-3) とは両立し得ない。かくて矛盾が導かれた。　Q.E.D.

注．$(n, r) = (4, 2)$ のときは (2-13) の事実が成立たず，E_r が M 上のベクトル束に拡張できない。

References

[1] T. Fujita ; An extendability criterion for vector bundles on ample divisors, to appear in Proc. Japan Acad.

[2] T. Fujita ; On the hyperplane section principle of Lefschetz, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[3] G. Kempf ; Vanishing theorems for flag manifolds, Amer. J. Math. 98 (1976), 325-331.

[4] A.J. Sommese ; On manifolds that cannot be ample divisors, Math. Ann. 221 (1976) 55 – 72.

[5] R. Hartshorne ; Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, Lecture Notes in Math. 156, Springer, 1970